UNTERSUCHUNG DER BEOBACHTUNGSFEHLER UND GENAUIGKEIT DES...

Matthäus Haid

UNTERSUCHUNG

DER

BEOBACHTUNGSFEHLER UND GENAUIGKEIT

DES

BAYERISCHEN PRÄCISIONS-NIVELLEMENT.

INAUGURALDISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

EINGEREICHT

BEI DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT ZU JENA

VON

M. HAID

PRIVATDOCENT AN DER K. TECHN. HOCHSCHULE MÜNCHEN

MÜNCHEN

AKADEMISCHE B[illegible]

1886

Untersuchung der Beobachtungsfehler und Genauigkeit des bayr. Praecisions-Nivellement.

Das bayrische Praecisions-Nivellement bildet, soweit es bis jetzt hergestellt ist, 7 geschlossene Polygone, an welche sich zur Verbindung mit den Nachbarländern mehr oder minder lange Nivellementstrecken anschliessen. Die Resultate desselben sind vollständig in den Abhandlungen der math.-physikalischen Classe d. k. bayr. Academie der Wiss. aus den Jahren 1870—1879 von Herrn Director Dr. C. M. v. Bauernfeind mitgetheilt, worauf ich hauptsächlich Bezug nehme. Von diesen 7 für sich geschlossenen Polygonen liegen 3 im Vorlande des bayrischen Hochgebirgs, und reihen sich die andern, der geographischen Ausdehnung Bayerns entsprechend, im Allgemeinen von Süd nach Nord an jene an; das am weitesten nördlich gelegene umschliesst das Fichtelgebirge in fast gleicher Höhe wie die südlichen Polygone die Berge des Vorlands. Mit Ausnahme zweier Strecken (Simbach—Passau und Tölz—Kaufbeuren) folgen sämmtliche Seiten der Polygone den Linien des bayrischen Eisenbahnnetzes, und wurde nur bei diesen beiden Strecken auf Strassen nivellirt, von welchen namentlich die letztere (Tölz-Kaufbeuren) bedeutende Steigungen und Gefälle besitzt.

Durch das nun im Laufe der beiden letzten Jahre erfolgte Nivellement der Strecke Holzkirchen—Tölz—Schongau—Kaufbeuren wurde das VI. Polygon des bayr. Praec.-Nivellement München—Holzkirchen—Tölz—Kaufbeuren—Augsburg—München geschlossen, und zeigte sich hiebei ebenso wie bei der Fichtelgebirgsschleife ein verhältnissmässig grosser Schlussfehler. Diess sowohl als der Umstand, dass nach der Ausgleichung nach der Methode der kl. Qu.*)

*) Bayr. Praec.-Niv. 5 Mittheilung 1879.

die übrig bleibenden Fehler dennoch einseitig vorherrschten, trotzdem das Fichtelgebirgspolygon mit dem grössten vorkommenden Schlussfehler von 0,108 m auf 242700 m Umfang nicht mit in die Ausgleichung aufgenommen wurde, veranlasste mich näher auf die Genauigkeit des bayr. Praec.-Niv. einzugehen und zu untersuchen, welchen Beitrag die nivellirte Länge und welchen die gemessene Höhe einer Strecke zu dem Betrage des mittleren Gesammtfehlers liefert.

Wenn es auch feststeht, dass sich nur die auf ein und derselben Niveaufläche hinziehende Nivellementschleife vollständig schliesst und auch locale Lothablenkungen das Nivellement beeinträchtigen, den Einfluss dieser Ursachen aber im einzelnen zu bestimmen, bis jetzt noch schwierig ist, und es auch fraglich erscheint, ob nicht die Beobachtungsfehler, Lattenänderungen und Theilungsfehler der Latten jenen Einfluss überwiegen, so dürfte es gerechtfertigt sein, eine solche Trennung des mittleren Fehlers summarisch vorzunehmen; der eine Theil würde dann hauptsächlich von dem reinen Nivellirungsfehler, der andere von Theilungsfehlern, Lattenänderungen und Unsymmetrie des Visurstrahls beim Rück- und Vorblick abhängen.

Das bayr. Praec.-Niv. ist durchgängig mit doppelten Wechselpunkten ausgeführt und gestattet, den reinen Nivellirungsfehler pro Kilometer aus den Differenzen des Doppelnivellement auf zweifache Weise zu ermitteln. Dieser Nivellirungsfehler, welcher sich hauptsächlich aus dem Ziel- und Libellenschätzungsfehler zusammensetzt, ausserdem aber noch durch Refractionsänderungen während der Dauer einer Stationsbeobachtung, ferner durch Schwenken der Latte und Theilungsfehler der Libelle und Latte beeinflusst wird, gibt ein Mass für die Genauigkeit der Sorgfalt bei der Ausführung des Nivellement, und lässt dessen Werth einen kleineren mittleren Fehler des ganzen Nivellement erwarten, als er sich aus den übrig bleibenden Fehlern nach der Ausgleichung ergibt.

Berechnet man auch unter der Annahme, dass die Schlussfehler geschlossener Nivellementzüge sich nur aus zufälligen Fehlern zusammensetzen, aus den 7 Polygonen den mittleren Nivellirungsfehler pro Kilometer, so bestätigt ein Vergleich des-

selben mit dem aus den Differenzen des Doppelnivellement ermittelten Nivellirungsfehler auch bei dem bayr. Praec.-Nivell. die Erfahrung, dass sich in den Differenzen des Doppelnivellement nicht alle Fehlerquellen aussprechen. Es werden in demselben hauptsächlich Fehler herrührend von ungleicher Krümmung des Visurstrahls beim Rück- und Vorblick und solche durch Lattenänderungen verborgen bleiben. Ersterer Fehler wächst zwar mit dem Quadrate der Zielweite, derselbe kann aber auch bei kurzen Distanzen und grossen Höhenunterschiede wegen der grösseren Verschiedenheit in den Dichtigkeiten der Luftschichten zwischen Rück- und Vorblick beträchtlich werden. Fehler aber, welche von der Veränderlichkeit der Latten herrühren, werden um so mehr sich fühlbar machen, je grösser die Höhenunterschiede auf den nivellirten Strecken sind und je grössere Lattenstücke zur Messung dieser Höhenunterschiede zur Verwendung kommen, d. h. je mehr das Terrain geneigt ist.

Da nun in dem bayr. Praec.-Nivell. einige der ausgeführten Polygone bedeutendere Terrainneigungen gegenüber derjenigen in den anderen enthalten, so lässt sich erwarten, dass aus den nur 7 Polygonen doch wenigstens das gegenseitige Verhältniss der Einwirkung der nivellirten Länge und gemessenen Höhe auf den mittleren Fehler im Nivellement näherungsweise zum Ausdruck kommt; dieses Verhältniss ist aber genügend, um damit Gewichte der einzelnen Strecken zu berechnen, die bewirken, dass die Fehler derselben nach der Ausgleichung nach d. M. d. kl. Qu. den Gesetzen des Auftretens zufälliger Fehler besser folgen, als es bei jenen der Fall ist, welche unter der bisherigen Annahme der Gewichte umgekehrt proportional der nivellirten Länge aus der Ausgleichung n. d. M. d. kl. Qu. hervorgegangen sind. Es sollen ferner mit beiden Gewichtsannahmen die mittleren Unsicherheiten der ausgeglichenen Höhenunterschiede für solche Strecken bestimmt werden, welche zur Verbindung des bayr. Praec.-Nivell. mit demjenigen seiner Nachbarländer dienen und in das Bereich der 7 Polygone fallen, theils zum gegenseitigen Vergleich der Resultate bei beiden Gewichtsannahmen und zur Ermittlung des mittleren Fehlers, welcher durch das bayr. Nivell. übertragen wird, anderntheils um eine Grundlage der Gewichtsbestimmung bei Aus-

gleichung grösserer Polygone zu erhalten, von denen ein jedes wieder eine Gruppe kleinerer mit gleichem Instrument und nach einheitlicher Methode ausgeführter und für sich bereits ausgeglichener Polygone bildet.

I.

Wie erwähnt ermöglicht das gleichzeitig ausgeführte Doppel-Nivellement auf zweifache Weise ein Mass für die Genauigkeit der Arbeit abzuleiten: einmal aus den Beobachtungsdifferenzen der einzelnen Stationen, und zweitens aus den Differenzen der Höhenunterschiede auf einander folgender Fixpunkte.

1. Bestimmung und Untersuchung des mittleren Fehlers aus Stations-Beobachtungen.

Aus den Beobachtungsdifferenzen der einzelnen Stände, bei welchen der Fehler in der Bestimmung der Dicke der Unterlagsplatten gegenüber dem Zielfehler vernachlässigt wurde*), lässt sich zunächst der mittlere Stationsfehler für die verschiedenen vorkommenden Zielweiten und mit diesem der mittlere Nivellirungsfehler für die betreffende Zielweite bezogen auf den Kilometer ermitteln.

Die Differenz (d) der in einer Station beobachteten Höhenunterschiede (h_1 und h_2) ist ein wahrer Beobachtungsfehler einer Function des wahren Höhenunterschiedes (h), nämlich der

Function $h - h = 0$

Der wahre Fehler ist $d = h_1 - h_2$

Bei gleicher Zielweite und n unabhängigen Beobachtungen erhält man daher den mittleren Fehler (m) obiger Function aus

$$m^2 = \frac{[dd]}{n}$$

Hieraus folgt der mittlere Fehler einer Höhenbestimmung

$$m_1^2 = \frac{m^2}{2} = \frac{[dd]}{2n}$$

und schliesslich der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels der beiden beobachteten Höhenunterschiede im Doppelnivellement

$$m_2^2 = \frac{1}{2} m_1^2 = \frac{[dd]}{4n}$$

*) Bayr. Praec.-Niv. 2. Mittheilung S. 7.

$$m_2 = \sqrt{\frac{[dd]}{4\,n}}$$

Demgemäss wurden aus dem ganzen bayr. Praec.-Nivell. mit Ausnahme des Nivellement im Jahre 1869, in welchem die Beobachtungsmethode noch nicht wie in den späteren Jahrgängen durchgeführt war, einzelne Strecken zur Bestimmung des mittleren Stationsfehler herausgegriffen und deren Stände in Gruppen von gleichen Zielweiten geordnet. Eine jede solche Gruppe zerfällt wieder aus später zu erörternden Gründen in Abtheilungen, welche nach der vorhandenen Terrainneigung zusammen genommen sind. Es wurden ferner solche Strecken ausgewählt, welche in mehreren auf einander folgenden Stationen die gleichen Zielweiten — und zwar die am meisten und auch in verschiedenen Jahren vorkommenden — besassen. Hiedurch war die Auswahl der Strecken schon beschränkt; zwischen zwei auf einander folgenden Fixpunkten wurden dann sämmtliche Stände, soweit es die verschiedenen Zielweiten zuliessen, in die Rechnung mit aufgenommen. Die unten angegebenen Zielweiten sind aber nicht als streng richtig aufzufassen, sondern nur Mittelwerthe, von welchen Abweichungen bis zu $\pm$ 0,75 m zugelassen wurden; hauptsächlich ist darauf geachtet worden, dass der Rück- und Vorblick auf gleich grosse Entfernung geschah. Um auch gleiche Gewichte für alle Stationen unter sich zu erhalten, sind die wiederholten Stände, in denen wegen irgend welcher Vorkommnisse die Aufnahme mehrmals gemacht wurde, unberücksichtigt geblieben, indem in diesem Falle das Gewicht nicht proportional der Anzahl der Wiederholungen, sondern umgekehrt proportional dem mittleren Fehlerquadrat des arithmetischen Mittels aller Wiederholungen ist. Eine solche Berücksichtigung hätte aber die Arbeit verhältnissmässig erschwert gegenüber dem Gewinn von einigen Beobachtungen.

Das bis jetzt ausgeführte bayr. Praec.-Nivell. enthält circa 18100 Instrumentenstände, und gibt die folgende Tabelle aus 1353 Stationen der verschiedenen Jahrgänge und bei den verschiedensten Witterungsverhältnissen und Terrainneigungen nach Zielweiten geordnet die Summen [dd] in □ mm und die Anzahl n der Stationen, aus welchen sich die einzelnen [dd] zusammensetzen.

Zielweite	1870		1871		1872		1873		1874		1875		1878/79		1870—1879	
meter	[dd] □ mm	n	[dd] □ mm	n	[dd] □ mm	n	[dd] □ mm	n	[dd] □ mm	n	[dd] □ mm	n	[dd] □ mm	n	[dd] □ mm	n
9,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,86	6	0,86	6
10,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,95	16	2,95	16
11,7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,05	9	1,05	9
13,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,92	7	0,92	7
37,4	—	—	2,03	14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,03	14
42,0	—	—	1,22	14	—	—	—	—	—	—	—	—	4,01	14	5,23	28
43,5	—	—	2,22	14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,22	14
48,0	—	—	4,27	26	—	—	9,51	21	—	—	—	—	—	—	13,78	47
49,1	—	—	—	—	4,68	18	—	—	—	—	—	—	—	—	4,68	18
50,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,35	13	3,35	13
54,0	9,04	37	5,08	12	8,98	24	6,62	29	13,39	46	17,74	55	3,27	17	64,12	220
60,0	8,61	37	9,55	34	27,58	65	9,75	46	10,95	48	8,39	33	7,18	32	82,01	295
63,6	—	—	—	—	—	—	3,15	12	—	—	12,47	39	—	—	15,62	51
66,0	9,75	31	15,68	37	—	—	—	—	35,25	85	11,41	18	5,69	27	77,78	198
68,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14,39	46	14,39	46
72,0	4,72	14	9,75	30	—	—	—	—	8,15	27	—	—	9,06	29	31,68	100
73,6	—	—	—	—	18,78	62	11,89	37	—	—	—	—	—	—	30,67	99
75,0	13,11	34	9,41	19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	22,42	53
78,0	8,85	22	9,33	40	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	18,18	62
81,0	—	—	2,17	18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,17	18
82,0	3,58	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,58	9
84,0	7,74	15	—	—	—	—	3,00	8	—	—	—	—	—	—	10,74	23
86,5	—	—	4,60	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4,60	7
																1353

Aus der letzten Columne dieser Tabelle erhält man den mittleren Stationsfehler (m_2) in Millimeter für die verschiedenen Zielweiten (z) und durch Multiplication mit $\sqrt{\frac{1000}{2\,z}}$ den mittleren Nivellirungsfehler pro Kilometer M wie folgt:

$z^m =$	9,0	10,4	11,7	13,5	37,4	42,0
$m_2^2 =$	0,0358	0,0461	0,0292	0,0329	0,0363	0,0344
$m_2^{mm} =$	0,189	0,215	0,171	0,181	0,190	0,186
$M^{mm} = m_2 \sqrt{\frac{1000}{2\,z}} =$	1,41	1,49	1,12	1,10	0,69	0,64
$z^m =$	43,5	48,0	49,1	50,0	54,0	60,0
$m_2^2 =$	0,0396	0,0733	0,0650	0,0644	0,0729	0,0695
$m_2^{mm} =$	0,199	0,271	0,255	0,254	0,270	0,264
$M^{mm} = m_2 \sqrt{\frac{1000}{2\,z}} =$	0,67	0,87	0,82	0,80	0,82	0,76
$z^m =$	63,6	66,0	68,4	72,0	73,6	75,0
$m_2^2 =$	0,0766	0,0982	0,0782	0,0792	0,0774	0,1058
$m_2^{mm} =$	0,276	0,313	0,280	0,281	0,278	0,325
$M = m_2 \sqrt{\frac{1000}{2\,z}} =$	0,78	0,86	0,76	0,74	0,72	0,84
$z^m =$	78,0	81,0	82,0	84,0	86,5	
$m_2^2 =$	0,0733	0,0301	0,0994	0,1167	0,1643	
$m_2^{mm} =$	0,271	0,174	0,315	0,342	0,405	
$M = m_2 \sqrt{\frac{1000}{2\,z}} =$	0,69	0,43	0,78	0,84	0,98	

Hieraus geht hervor, dass man den mittleren Nivellirungsfehler pro Kilometer für Zielweiten von 37,4 m bis 86,5 m als constant annehmen darf, wie es auch, bei einem richtigen Gang der Arbeit sein soll, bei welchem der Fehler pro Kilometer durch eine grössere Anzahl Stände nicht vergrössert werden darf; ist aber M für die verschiedenen Zielweiten constant, so ist m_2 proportional der Quadratwurzel aus der Zielweite. Die Grenzen innerhalb welcher M nach obiger Zusammenstellung schwankt, rühren von der zu geringen Anzahl von Beobachtungen für die einzelne Zielweite und von dem Einfluss der äusseren Witterungsverhältnisse bei der betreffenden Strecke her.

Für die kurzen Zielweiten von 9,0—13,5 m ist aber der mittlere Nivellirungsfehler pro Kilom. beträchtlich grösser als derjenige für alle übrigen Zielweiten, und lässt es sich vermuthen, dass für kurze Zielweiten, welche durch Terrainverhältnisse bedingt waren, diese letzteren ebenfalls den mittleren Fehler beeinflussen, während bei grösseren Stationen dieser Einfluss mehr verschwindet

Es dürfen daher die Werthe von M, die aus den kurzen Zielweiten hervorgehen, nicht mit jenen der längeren verglichen werden, da die Beobachtungen für beide wegen des verschieden geneigten Terrains unter verschiedenen Bedingungen gemacht wurden. Desswegen und weil die kurzen Stationen von 9,0 m bis 13,5 m sehr selten sind, wie schon aus der geringen Stationsanzahl der obigen Tabelle ersichtlich ist; wurden dieselben für den Mittelwerth von M nicht berücksichtigt; dieser berechnet sich aus den Werthen für die Zielweiten von 37,4 m bis 86,5 m und mit Gewichten proportional der zugehörigen Beobachtungsanzahl zu

$$M_m = \pm 0{,}780 \text{mm}$$

Für die mittleren Zielweiten von 48 m bis 66 m, welche am häufigsten vorkommen und wegen ihrer grossen in Rechnung gezogenen Anzahl von unter den verschiedensten Verhältnissen angestellten Beobachtungen das grösste Gewicht besitzen, ergibt sich der mittlere Nivellirungsfehler pro Kilom. zu 0,808 mm, wenig verschieden von obigem Gesammtmittel.

Da nun mm, wie eben gesagt, der mittlere Fehler M und daher auch m_2 für die kurzen Zielweiten beträchtlich grösser gefunden wurde als die aus den übrigen längeren Stationen berechneten, und da ferner von den Fehlerquellen, aus welchen der Stationsfehler hervorgeht, diejenigen Beträge, welche von dem Sckwenken der Latten und allenfalls auch von Refractionsänderungen im Rück- und Vorblick während der Dauer einer Station herrühren, mit der Terrainneigung zunehmen können, wurde in folgender Tabelle die Stationsbeobachtungen auch nach Höhenunterschieden von je 0,5 m geordnet, und die mittleren Fehlerquadrate (m_2^2) aus sämmtlichen 1353 Instrumentenständer nach Zielweiten und Terrainneigung zusammengestellt.

Zur nähern Erläuterung möge noch folgendes dienen. Bezeichnet man bei dem gleichzeitig ausgeführten Doppelnivellement den in einer Station aus dem ersten Nivellement ermittelten Höhenunterschied mit I, denjenigen aus dem zweiten mit II, so wurde d immer als Differenz I—II gerechnet und ergibt sich bald positiv bald negativ. Um einigermassen Aufschluss über das Auftreten der Fehler zu erhalten, wurde in die Tabelle noch die Summe und Anzahl der $+d$ und $-d$ und der $d = 0$ aufgenommen, aus welchen sich jede einzelne Summe [dd] zusammensetzt.

Zielweite	Höhenunterschiede von 0,0 - 0,5 m								Höhenunterschiede von 0,5 — 1,0 m								Höhenunterschiede über 1,0 m*)							
	[dd]	n	+ d		— d		d = 0	m_2^2 □ mm	[dd]	n	+ d		— d		d = 0	m_2^2 □ mm	[dd]	n	+ d		— d		d = 0	m_2^2 □ mm
meter			Summe	Anzahl	Summe	Anzahl	Anzahl				Summe	Anzahl	Summe	Anzahl	Anzahl				Summe	Anzahl	Summe	Anzahl	Anzahl	
9,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,86	6	1,8	5	0,2	1	—	0,0358
10,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,95	16	1,7	4	4,2	11	1	0,0461
11,7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,05	9	1,9	5	0,8	4	—	0,0292
13,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,92	7	1,5	5	0,9	2	—	0,0329
37,4	1,97	11	2,3	5	1,2	3	3	0,0448	0,06	3	0,3	2	0,1	1	—	0,0050	—	—	—	—	—	—	—	—
42,0	2,56	15	2,6	8	2,4	6	1	0,0427	0,59	4	0,3	1	1,2	3	—	0,0369	2,08	9	0,7	3	2,3	4	2	0,0578
43,5	—	—	—	—	—	—	—	—	2,22	14	1,6	7	3,2	7	—	0,0396	—	—	—	—	—	—	—	—
48,0	8.32	31	6,7	13	6,1	14	4	0,0671	5,46	16	5,6	11	2,3	4	1	0,0853	—	—	—	—	—	—	—	—
49,1	3,93	13	2,3	7	3,0	6	—	0,0756	0,75	5	0,6	3	1,1	2	—	0,0375	—	—	—	—	—	—	—	—
50,0	2,77	8	2,2	5	1,7	2	1	0,0866	0,58	5	1,1	3	0,3	2	—	0,0290	—	—	—	—	—	—	—	—
54,0	39,12	121	29,6	60	25,4	52	9	0,0808	22,32	86	19,8	43	16,2	37	6	0,0649	2,68	13	3,4	8	2,2	5	—	0,0515
60,0	51,85	173	36,3	77	35,7	79	17	0,0749	20,73	73	12,3	30	18,4	41	2	0,0710	9,43	49	8,3	21	9,2	23	5	0,0481

*) Bei den Zielweiten von 9,0—13,5 m kommen nur Höhenunterschiede von über 2,0 m vor, bei allen andern Zielweiten ist der grösste Höhenunterschied 1,0 - 1,70 m.

Zielweite	Höhenunterschiede von 0,0—05 m								Höhenunterschiede von 0,5—1,0 m								Höhenunterschiede über 1,0 m *)							
	[dd]	n	+ d		— d		d = 0	m_2^2	[dd]	n	+ d		— d		d = 0	m_2^2	[dd]	n	+ d		— d		d = 0	m_2^2
meter			Summe	Anzahl	Summe	Anzahl	Anzahl	□ mm			Summe	Anzahl	Summe	Anzahl	Anzahl	□ mm			Summe	Anzahl	Summe	Anzahl	Anzahl	□ mm
63,6	**12,51**	**41**	8,0	16	11,3	21	4	**0,0763**	**1,63**	**5**	1,5	3	0,8	2	—	**0,0815**	**1,48**	**5**	1,4	3	0,8	2	—	**0,0740**
66,0	**41,92**	**110**	32,3	54	21,9	49	7	**0,0953**	**27,98**	**64**	16,1	29	17,5	31	4	**0,1093**	**7,88**	**24**	5,1	12	6,7	12	—	**0,0821**
68,4	**5,91**	**23**	6,2	17	3,5	5	1	**0,0642**	**2,45**	**9**	2,7	6	1,0	2	1	**0,0681**	**6,03**	**14**	5,0	6	2,7	6	2	**0,1077**
72,0	**9,67**	**32**	4,5	11	8,0	15	6	**0,0756**	**14,52**	**50**	11,6	25	9,0	20	5	**0,0726**	**7,49**	**18**	5,5	13	3,6	4	1	**0,1040**
73,6	**16,36**	**40**	9,6	19	11,8	18	3	**0,1023**	**11,17**	**40**	8,3	22	9,0	17	1	**0,0698**	**3,14**	**19**	3,4	8	3,2	10	1	**0,0413**
75,0	**8,46**	**21**	4,3	10	5,9	9	2	**0,1007**	**13,96**	**32**	8,7	15	9,1	16	1	**0,1091**	—	—	—	—	—	—	—	—
78,0	**10,68**	**44**	8,3	19	10,3	24	1	**0,0607**	**4,75**	**11**	5,8	9	0,7	2	—	**0,1080**	**2,75**	**7**	2,2	3	1,9	4	—	**0,0982**
81,0	**0,51**	**5**	1,3	4	—	–	1	**0,0255**	**1,58**	**11**	1,4	4	2,2	6	1	**0,0359**	**0,08**	**2**	0,4	2	—	—	—	**0,0100**
82	**3,58**	**9**	2,5	5	2,3	4	—	**0,0994**	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
84,0	**0,20**	**3**	—	—	0,6	2	1	**0,0167**	**9,50**	**18**	5,2	9	6,6	9	—	**0,1319**	**1,04**	**2**	0,2	1	1,0	1	—	**0,1300**
86,5	**4,60**	**7**	3,3	5	1,3	2	—	**0,1643**	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

*) Bei den Zielweiten von 9,0—13,5 m kommen nur Höhenunterschiede von über 2,0 m vor, bei allen andern Zielweiten ist der grösste Höhenunterschied 1,0 – 1,70 m.

Die Tabelle zeigt, dass für kurze Zielweiten und horizontales Terrain die Beobachtungen vollständig fehlen, wie es auch nicht anders erwartet werden durfte, ferner aber dass bei derselben Zielweite die mittleren Fehler m_2 für die verschiedenen Terrainneigungen ziemlich regellos sind. Sobald man jedoch die Verschiedenheit der Witterungsverhältnisse berücksichtigt, erklärt sich, wie unten gezeigt wird, diese anscheinende Regellosigkeit.

Um die fehlenden Werthe der mittleren Fehler für die kurzen Zielweiten bei nahezu horizontalem Terrain zu interpoliren, soll zunächst aus den einzelnen m_2^2 der ersten Columne obiger Tabelle ein Gesetz zwischen diesen und der Zielweite z ermittelt werden. Dieser Function wurde die Form

$$m_2^2 = Az + Bz^2$$

zu Grunde gelegt und, indem man die mittleren Fehler der Zielweiten von 81,0 m und 84,0 m wegen ihres augenscheinlich grossen fehlerhaften Betrages und ihrer geringen einseitigen Beobachtungsanzahl aus der Rechnung ausschloss, nach der Methode d. kl. Qu. aus 16 Fehlergleichungen mit Gewichten proportional der Beobachtungsanzahl erhalten für

$$A = + 0{,}001838 \pm 0{,}0004145$$
$$B = - 0{,}00\,0008625 \pm 0{,}00\,0006272.$$

Die Abhängigkeit des Quadrats des mittleren Stationsfehlers in □ mm und der Zielweite z in meter bei nahezu horizontalem Terrain ist dann ausgedrückt durch

$$m_2^2 = + 0{,}001838\,z - 0{,}000008625\,z^2$$

Die hiemit berechneten m_2^2 geben mit den beobachteten die Fehlerquadratsumme 0,134340 (Controle 0,134354).

Wegen der Kleinheit und grossen Unsicherheit von B gegenüber A kann man das zweite Glied in der angenommenen Form der Function zwischen m_2 und z vernachlässigen und erhält dann aus denselben 16 Fehlergleichen und derselben Gewichtsannahme für

$$A = + 0{,}001276 \pm 0{,}00006$$

und daher

$$m_2^2 = + (0{,}001276 \pm 0{,}00006)\,z$$

Die mit dieser letzten Form berechnete Fehlerquadratsumme gibt 0,152423 (Controle 0,152352). Durch Ausziehen der Wurzel wird

$$m_2 = \pm (0{,}0357 \pm 0{,}0008) \sqrt{z}$$

Man hat daher auch hier wieder für längere Zielweiten und gleiche Terrainverhältnisse den mittleren Stationsfehler m_2 proportional der Quadratwurzel aus der Zielweite.

Berechnet man mit diesen beiden Functionsformen für die kurzen Zielweiten die mittleren Stationsfehler m_2, so ist aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich, dass diese für horizontales Terrain kleiner sind als die beobachteten für Höhenunterschiede von über 2,0 m.

Zielweite	berechnet für Höhenunterschiede von 0,0 – 0,5 m				beobachtet für Höhenunterschiede von über 2,0 m	
meter	$m_2^2 = Az + Bz^2$		$m_2^2 = Az$			
	m_2^2	m_2	m_2^2	m_2	m_2^2	m_2
	□ mm	mm	□ mm	mm	□ mm	mm
9,0	0,0158	0,126	0,0115	0,107	0,0358	0,189
10,4	0,0182	0,135	0,0133	0,115	0,0461	0,215
11,7	0,0203	0,143	0,0149	0,122	0,0292	0,171
13,5	0,0232	0.152	0,0172	0,131	0,0329	0,181

Sucht man diese Verschiedenheit von m_2 bei horizontalem und bei geneigtem Terrain auch in den einzelnen Nivellementstrecken mit längeren Stationen nachzuweisen, so tritt hierin der Mangel an Beobachtungen, die unter gleichen Witterungsverhältnissen, wo möglich an einem und demselben Tage, bei verschieden geneigtem Terrain hätten angestellt werden müssen, hindernd entgegen. Versuchsweise wurden aus den 1353 Ständen die in dieser Beziehung in Betracht kommenden Strecken herausgenommen und nach möglichst gleichen Witterungsverhältnissen, Terrainneigung und Zielweite zusammengestellt.

In Bezug auf die Witterungsverhältnisse konnte man die einzelnen Nivellementstrecken in zwei Gruppen scheiden, und zwar in eine solche mit Strecken, die bei klarem Himmel und Sonnenschein, und in eine zweite mit Strecken, die bei bedecktem Himmel nivellirt wurden. Die in nachfolgender tabellarischer Uebersicht den mittleren Fehlerquadraten beigefügten Columnen enthalten die

Zielweite m	Jahrgang	Höhenunterschiede		Höhenunterschiede	Strecke und Abtheilung	Datum	m_2^2 □ mm	Anzahl d. Stat.
50	1879	0,0—0,5	B					
54	1874	0,0—0,5	S					
-	1874	0,0—0,2	M					
	1875	0,0—0,5	S					
	1875	0,0—0,5	S					
	1875	0,0—0,5	S	.0—1,6	Simbach—Poking 6	18.Sept.	0,0394	4
60	1873	0,0—0,3	S	.1—1,7	Prüfenningen—Ettershausen 3	13.Sept.	0,0396	12
					Ettershausen—Eichhofen 1	15.Sept.		
	1873	0,0—0,4	P					
73,6	1872	0,0—0,5	A	.0—1,3	Assling—Ostermünchen 2	29. Aug.	0,0550	5
					Ostermünchen—Karolinenfeld 1	30. Aug.		
	1873	0,0—0,5	B	.0—1,5	Beratzhausen—Parsberg 2	23.Sept.	0,0363	14
					Prüfeningen—Ettershausen 3	13.Sept.		

m Himmel“.

Zielweite m	Datum	m_2^2 □ mm	Anzahl d. Stat.	
	5. Sept.	0,0590	5	
	69. Oct.	0,0843	10	
63,	).Sept.	0,0815	5	
66,	. Sept.	0,1463	19	
	. Oct.			
	¦.Sept.	0,0300	4	
68,	).Sept.	0,0855	5	
	).Sept.	0,1388	8	
75,	).Sept.	0,1525	10	
81,	).Sept.	0,0358	11	

Anzahl Stationen, welche zur Bestimmung des betreffenden mittleren Fehlers dienten.

Vergleicht man bei gleicher Zielweite und denselben Witterungsverhältnissen die mittleren Fehlerquadrate der verschiedenen Terrainneigungen, so geht aus vorstehender Zusammenstellung hervor, dass die mittleren Fehler bei der ersten Gruppe mit der Terrainneigung abnehmen, bei der zweiten Gruppe dagegen zunehmen. Bei denjenigen Nivellementstrecken, für welche die Beobachtungshefte Wind oder schwankende Bilder angaben, war der mittlere Fehler vollkommen regellos und mit der Terrainneigung bald wachsend, bald abnehmend. Wenn nun auch aus den obigen nur wenigen Beobachtungen ein Maass für die Abhängigkeit des mittleren Stationsfehlers von der Terrainneigung nicht ermittelt werden kann, und dieses auch von der grossen Verschiedenheit der Witterungsverhältnisse abhängt, so darf doch aus den bisherigen Untersuchungen gefolgert werden, dass der Nivellirfehler von der Neigung des Terrains beeinflusst wird, namentlich bei steilem Terrain. Die Einwirkung der Witterungsverhältnisse jedoch dürfte wohl kaum gesetzmässig ermittelt werden.

2. Bestimmung des mittleren Nivellirfehlers aus den Nivellement-Differenzen auf einander folgender Fixpunkte.

Zur Berechnung des mittleren Nivellirfehlers pro Kilometer aus den beobachteten Differenzen der Höhenunterschiede zweier auf einander folgender Fixpunkte, ist ähnlich wie oben jede solche Differenz (d) als ein wahrer Beobachtungsfehler der Höhe Null zu betrachten. Um daraus das mittlere Fehlerquadrat m_d^2 zu bilden, hat man jedes einzelne dd noch mit dem zugehörigen Gewicht (g) zu multipliciren und deren Summe mit der Anzahl (n) derselben zu dividiren:

$$m_d^2 = \frac{[gdd]}{n}$$

Hieraus erhält man den mittleren Fehler einer Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Fixpunkte

$$m_1^2 = \frac{m_d^2}{2}$$

und den mittleren Fehler m_2 des arithmetischen Mittels aus den beiden Höhenbestimmungen des Doppelnivellement:

$$m_2^2 = \frac{m_d^2}{4} = \frac{[gdd]}{4\,n}$$

Da nun innerhalb zweier Fixpunkte die Zielweiten ziemlich die gleichen sind, und ferner der Stationsfehler nach dem Vorhergehenden proportional der Quadratwurzel aus der Zielweite ist, so hat man hier die Gewichte umgekehrt proportional der Entfernung (s) der beiden Fixpunkte zu nehmen. Legt man als Gewichtseinheit die Entfernung von 1 Kilometer zu Grunde, so ergibt sich der mittlere Nivellirfehler pro Kilometer Doppelnivellement aus

$$M = \pm \sqrt{\frac{1}{4\,n}\left[\frac{dd}{s}\right]}$$

In nachfolgender Tabelle ist die Anzahl (n) und die Summen $\left[\frac{dd}{s}\right]$ für alle Fixpunkte der Seiten der 7 Polygone zusammengestellt, und ist für jede derselben der mittlere Nivellirfehler pro Kilom. in der letzten Columne berechnet.

Jahrgang	Strecke	$\left[\frac{dd}{s}\right]$ □ mm	n	M mm
1869	Lichtenfels—Neuenmarkt	0,30335	36	0,046
„	Neuenmarkt—Oberkotzau	0,95507	45	0,073
„	Oberkotzau—Franzensbad	0,14692	29	0,036
„	Franzensbad—Weiden	0,21156	54	0,030
„	Weiden—Neuenmarkt	0,08953	51	0,021
„	Lichtenfels—Bamberg	0,14794	31	0,035
„	Bamberg—Nürnberg	0,23913	39	0,039
„	Nürnberg—Nördlingen	0,28578	54	0,036
„	Nördlingen—Augsburg	0,07509	32	0,024
„	Augsburg—Kaufbeuren	0,11155	28	0,032
„	Kaufbeuren—Kempten	0,05929	22	0,026
1870	München—Augsburg	0,08057	36	0,024
„	Augsburg—Neuulm	0,11708	42	0,026

Jahrgang	Strecke	$\left[\frac{dd}{s}\right]$ □ mm	n	M mm
1870	Rosenheim—Holzkirchen	0,06743	20	0,029
1871	München Holzkirchen	0,05229	13	0,032
„	Kempten—Neuulm	0,14731	42	0,030
1872	München - Geiselhöring	0,12404	59	0,023
„	Geiselhöring—Regensburg	0,03940	16	0,025
„	München—Rosenheim	0,13820	36	0,031
1873	Nürnberg - Regensburg	0,24284	70	0,029
„	Regensburg—Weiden	0,18284	56	0,028
1874	München – Simbach	0,16353	43	0,031
„	Geiselhöring—Passau	0,13136	41	0,028
1875	Passau—Simbach	0,10415	26	0,032
1878	Holzkirchen—Penzberg	0,03105	18	0,021
1878 u. 79	Penzberg—Kaufbeuren	0,15974	45	0,030
	Summe	4,40704	984	

Aus sämmtlichen 984 Differenzen erhält man einen mittleren Nivellirfehler pro Kilometer:

$$M = \sqrt{\frac{4,40704}{4984}} = \sqrt{0,00112} = \pm 0,033 \text{ mm}$$

Wenn nun auch dieser Werth seiner geringen Grösse wegen sehr unwahrscheinlich ist, so ist doch ein Vergleich dieser mittleren Fehler der einzelnen Strecken unter sich statthaft und kann aus der Tabelle entnommen werden, dass in allen Jahrgängen von den verschiedenen Beobachtern das Nivellement mit der gleichen Sorgfalt ausgeführt wurde. Die Abweichungen der einzelnen mittleren Fehler mit dem aus allen Differenzen zu 0,033 mm gerechneteu sind nicht bedeutend und rühren von den gerade herrschenden Witterungsverhältnissen her. Eine einzige Ausnahme hievon macht die Strecke Neuenmarkt—Oberkotzau, für welche der mittlere Fehler mehr als das Doppelte von 0,033 mm beträgt. Diess ist um so mehr bemerkenswerth, da diese Strecke eine Seite des mit dem verhältnissmässig grossen Fehler von 0,108 m abschliessenden Fichtelgebirgspolygon bildet.

3. Bestimmung des mittleren Fehlers aus den Polygon-Abschlüssen.

Berechnet man endlich aus den Schlussfehler (△) und den Umfängen (U) der 7 Polygone einen mittleren Fehler pro Kilom. Doppelnivellement, so ist für denselben:

$$M = \pm \sqrt{\frac{\left[\frac{\triangle\triangle}{U}\right]}{7}}$$

Nach einer unten folgenden Tabelle ist hierin $\left[\frac{\triangle\triangle}{U}\right] = 68{,}700$ für Millimeter und Kilometer, womit man erhält:

$$M = \pm \sqrt{\frac{68{,}700}{7}} = \pm \sqrt{9{,}8143}$$

$$M = \pm 3{,}13 \text{ mm}$$

Stellt man die 3 Werthe von M, welche die bisherigen Untersuchungen ergeben haben, zusammen so hat man:

M = 0,780 mm berechnet aus Stationsbeoachtungen
= 0,033 „ „ „ Differenzen der Höhenunterschiede aufeinanderfolgender Fixpunkte
= 3,13 „ berechnet aus den Schlussfehlern der 7 Polygone (mit Einschluss der Fichtelgebirgsschleife).

Die grosse Verschiedenheit dieser 3 Werthe von M, namentlich der beiden ersten gegenüber dem letzten, zeigt deutlich, dass in den Differenzen des Doppelnivellement nicht alle Fehlerquellen enthalten sind. Da die einzelnen Seiten der Polygone innerhalb grösserer Zeitintervalle nivellirt sind, so werden diejenigen Fehlerbeträge, welche ihre Ursache in Aenderungen der Latte haben, erst im Polygonschlussfehler sich aussprechen. Auch werden diejenigen Fehler, welche von Refractionsdifferenzen des Visurstrahls beim Rück- und Vorblick herrühren, in den Differenzen des Doppelnivellement nicht zum Ausdruck gelangen, in welchen sich höchstens eine Refractionsänderung, aber keineswegs eine Unsymmetrie der Lichtkurve nachweissn lässt.

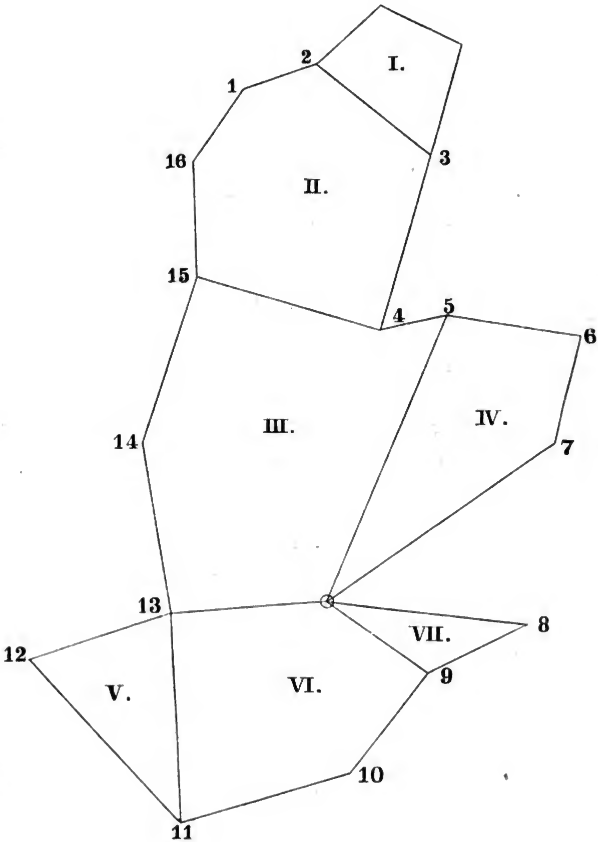
Da nun erstere Fehler vollkommen unabhängig von der nivellirten Länge sind, und auch oben gezeigt wurde, dass der Nivellirungsfehler von der Neigung des Terrains also von der gemessenen Höhe beeinflusst wird, so dürfte bei der Ausgleichung geschlossener Polygone die bis jetzt allgemeine Annahme der Gewichte umgekehrt proportional der nivellirten Länge nicht überall und namentlich nicht bei Praec.-Nivell. zulässig sein, wenn letzteres grössere absolute Höhen zurücklegt. Doch sollen im Folgenden mit Ausschluss des Fichtelgebirgspolygon die 6 übrigen Polygone unter dieser eben erwähnten Gewichtsannahme nach d. M. d. kl. Qu. ausgeglichen, und als Ergänzung der Ausgleichung, welche ich im Auftrag des Herrn Dir. v. Bauernfeind für die 5. Mittheilung des bayr. Praec.-Nivell. machte, die mittleren Fehler durchgehender Linien berechnet werden. Dieser ersten Ausgleichung von 6 Polygonen folgt dann eine zweite, welche sich auf alle 7 Polygone erstreckt, und deren Gewichte die gemessenen Höhen in den einzelnen Strecken berücksichtigt.

II.

Ausgleichung nach der Methode d. kl. Qu.

1. Sämmtliche unten folgende Höhenunterschiede und Längen der einzelnen Nivellementstrecken sind auf die Höhenmarken der Bahnhofsgebäude in den betreffenden Städten bezogen, und wurde hievon nur in München und Augsburg eine Ausnahme gemacht, indem in ersterer Stadt die Höhenmarke an der Salzstrassenbrücke, in Augsburg die Höhenmarke an der Gögginger Wegbrücke den Anschlusspunkt bezeichnet. Nebenstehende Figur veranschaulicht die Gruppirung der 7 Polygone.

Als Unbekannte sind die 16 Höhenunterschiede zwischen München und den übrigen Städten eingeführt, und kommen diesen folgende Nährungswerthe mit den Verbesserungen x zu, welche letztere den absoluten Werthen beigefügt wurden und durch die Ausgleichung zu bestimmen sind. Das positive oder negative Vorzeichen deutet auf ein Gefälle oder Steigung der betreffenden Nivellementstrecke.



meter

1. München—Lichtenfels $= + (258{,}4376 + x_1)$
2. —Neuenmarkt $= + (173{,}1115 + x_2)$
3. —Weiden $= + (123{,}9251 + x_3)$
4. —Regensburg $= + (181{,}5430 + x_4)$
5. —Geiselhöring $= + (161{,}9366 + x_5)$

		meter
6.	München—Passau	$= + (218{,}7193 + x_6)$
7.	—Simbach	$= + (172{,}3407 + x_7)$
8.	—Rosenheim	$= + (\ 74{,}4257 + x_8)$
9.	—Holzkirchen	$= - (162{,}7622 + x_9)$
10.	—Penzberg	$= - (\ 82{,}6482 + x_{10})$
11.	—Kempten	$= - (174{,}7995 + x_{11})$
12.	—Neuulm	$= + (\ 51{,}2089 + x_{12})$
13.	—Augsburg	$= + (\ 31{,}9722 + x_{13})$
14.	—Nördlingen	$= + (\ 92{,}0405 + x_{14})$
15.	—Nürnberg	$= + (211{,}1107 + x_{15})$
16.	—Bamberg	$= + (281{,}0086 + x_{16})$

Beobachtet wurden folgende 22 Höhenunterschiede mit den zugehörigen Streckenlängen L in Kilometer:

			meter	L-Kilom.
1.	Lichtenfels—Neuenmarkt*)	= —	85,3261	42,672
2.	Neuenmarkt—Weiden	= —	49,1864	79,990
3.	Weiden—Regensburg	= +	57,6179	86,969
4.	Regensburg—Geiselhöring	= —	19,6064	33,666
5.	Geiselhöring—Passau	= +	56,7827	91,737
6.	Passau—Simbach	= —	46,3786	56,287
7.	Simbach—München	= —	172,2958	122,738
8.	München—Rosenheim	= +	74,4257	64,322
9.	Rosenheim—Holzkirchen	= —	237,1879	38,129
10.	Holzkirchen—Penzberg	= +	80,1140	40,052
11.	Penzberg—Kempten	= —	92,1513	133,180
12.	Kempten—Neuulm	= +	225,9297	85,951
13.	Neuulm—Augsburg	= —	19,2367	84,022
14.	Augsburg—Nördlingen	= +	60,0683	72,647
15.	Nördlingen—Nürnberg	= +	119,0702	101,181
16.	Nürnberg—Bamberg	= +	69,8979	60,009
17.	Bamberg—Lichtenfels	= —	22,5710	32,198
18.	Nürnberg—Regensburg	= —	29,5538	100,923

*) Bei der wiederholten Durchsicht der Rechnenlisten wurde in dieser Strecke ein Rechnungsfehler von 1 cm entdeckt, wodurch der Schlussfehler des 2. Polygons um ebensoviel verbessert wird.

		meter	L - Kilom.
19.	München—Geiselhöring	= + 161,9119	113,600
20.	München—Holzkirchen	= — 162,7603	36,104
21.	München—Augsburg	= + 31,9722	60,567
22.	Augsburg—Kempten	= — 206,7028	102,667

Bezeichnet man die den Beobachtungen zukommenden Fehler mit λ und die aus den eingeführten Nährungswerthen und den Beobachtungen sich ergebenden Differenzen mit l in Centimeter, so erhält man zur Bestimmung der 16 Unbekannten folgende

22 Fehlergleichungen mit den zugehörigen Gewichten $g = \frac{1000}{L}$.

			1^{cm}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	g =
1.	λ_1	=	.	+1	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	[illegible]
2.	λ_2	=	.	.	+1	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	[illegible]
3.	λ_3	=	.	.	.	−1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	[illegible]
4.	λ_4	=	.	.	.	.	+1	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	[illegible]
5.	λ_5	=	.	.	.	.	.	−1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	[illegible]
6.	λ_6	=	.	.	.	.	.	.	+1	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	[illegible]
7.	λ_7	=	+4,49	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	[illegible]
8.	λ_8	=	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	[illegible]
9.	λ_9	=	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	+1	.	.	.	.	.	.	.	[illegible]
10.	λ_{10}	=	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	−1	.	.	.	.	.	.	[illegible]
11.	λ_{11}	=	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	.	.	.	.	.	[illegible]
12.	λ_{12}	=	+7,87	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	+1	.	.	.	.	[illegible]
13.	λ_{13}	=	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	−1	.	.	.	[illegible]
14.	λ_{14}	=	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	.	.	[illegible]
15.	λ_{15}	=	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	.	[illegible]
16.	λ_{16}	=	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	[illegible]
17.	λ_{17}	=	.	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	[illegible]
18.	λ_{18}	=	+1,39	.	.	.	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	[illegible]
19.	λ_{19}	=	+2,47	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	[illegible]
20.	λ_{20}	=	+0,19	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	[illegible]
21.	λ_{21}	=	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	[illegible]
22.	λ_{22}	=	+6,89	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	+1	.	.	.	[illegible]

Aus diesen folgen die Normalgleichungen, welchen zur Bestimmung der Gewichte der ausgeglichenen Höhenunterschiede oder von Functionen derselben die bezüglichen Gewichtscolumnen beigefügt wurden; diese letzteren sind für die betreffenden Unbekannten mit dem zugehörigen (x) in einer Klammer bezeichnet. Die Summennormalgleichung wurde doppelt gebildet und in der ganzen Rechnung auch für die Gewichtscolumnen zur Controle mitgeführt (siehe nebenstehendes Tableau 1).

Die Auflösung dieser Gleichungen nach dem Gauss'schen Agorithmus liefert die reducirten Normalgleichungen mit den angehängten Gewichtscolumnen für jedes einzelne (x) (siehe Tableau 2).

Hieraus ergeben sich die an den eingeführten Näherungswerthen anzubringenden Verbesserungen wie folgt:

centim.

$$x_1 = -\ 2{,}66891$$
$$x_2 = -\ 2{,}59370$$
$$x_3 = -\ 2{,}45267$$
$$x_4 = -\ 2{,}29932$$
$$x_5 = -\ 2{,}52641$$
$$x_6 = -\ 3{,}19120$$
$$x_7 = -\ 3{,}59946$$
$$x_8 = +\ 0{,}43492$$
$$x_9 = -\ 0{,}69275$$
$$x_{10} = -\ 1{,}52124$$
$$x_{11} = -\ 4{,}27532$$
$$x_{12} = -\ 2{,}61643$$
$$x_{13} = -\ 1{,}66034$$
$$x_{14} = -\ 2{,}14974$$
$$x_{15} = -\ 2{,}83178$$
$$x_{16} = -\ 2{,}72565$$

Durch Einsetzen der Werthe für die betreffenden x in die Summennormalgleichung wird diese befriedigt (380,861 = 380,867), und dadurch die Richtigkeit der x bestätigt. Mit diesen letzteren ergeben sich dann die ausgeglichenen Höhenunterschiede zwischen

München und den übrigen Städten, wie dieselben unten mit den Resultaten einer zweiten Ausgleichung zusammengestellt sind.

Aus den Fehlergleichungen erhält man die einzelnen λ, mit welchen sich die Fehlerquadrate $\lambda\lambda g$ und hieraus die auf gleiches Gewicht reducirten Fehler $\lambda\sqrt{g}$ direct berechnen:

	λ^{cm}	$\lambda\lambda g$	$\lambda\sqrt{g}$
1)	— 0,07521	0,13254343	— 0,3641
2)	— 0,14103	0,24861826	— 0,4986
3)	+ 0,15334	0,27041540	+ 0,5200
4)	+ 0,22708	1,53154419	+ 1,2376
5)	— 0,66479	4,81720861	— 2,1949
6)	+ 0,40827	2,96192370	+ 1,7210
7)	+ 0,89054	6,46343677	+ 2,5423
8)	+ 0,43492	2,94129883	+ 1,7150
9)	— 0,25783	1,74372773	— 1,3205
10)	+ 0,82849	17,13925848	+ 4,1400
11)	— 2,75408	56,96310764	— 7,5474
12)	+ 0,97825	11,12959721	+ 3,3361
13)	— 0,95609	10,87779293	— 3,2981
14)	— 0,48940	3,29808520	— 1,8161
15)	— 0,68204	4,59592406	— 2,1438
16)	+ 0,10614	0,18766886	+ 0,4332
17)	— 0,05674	0,09998836	— 0,3162
18)	+ 0,85754	7,28756444	+ 2,6995
19)	— 0,05641	0,02799741	— 0,1673
20)	— 0,50275	7,00135648	— 2,6460
21)	— 1,66034	45,51381296	— 6,7464
22)	+ 0,95434	8,87077548	+ 2,9783
		$[\lambda\lambda g] = 194,10364643$	

Die Berechnung der Summe $[\lambda\lambda g]$ aus der Summe $[llg]$ und den reducirten Normalgleichungen gibt in Uebereinstimmung mit der direct gerechneten 194,123705, wodurch die Richtigkeit der Ausgleichung bestätigt wird.

Der mittlere Fehler für die Gewichtseinheit (μ) ist bei n Beobachtungen und m Unbekannten

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{n-m}} \pm \frac{\mu}{\sqrt{2\,(n-m)}}$$

Es ist daher

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{194{,}10364643}{22-16}} = \sqrt{32{,}35060774}$$

$$\mu = \pm\, 5{,}6878 \text{ cm}$$

und der mittlere Fehler pro Kilometer doppelt nivellirter Länge:

$$M = \pm \sqrt{0{,}03235061} \pm \sqrt{\frac{0{,}03235061}{12}}$$

$$M = \pm\, 0{,}1799 \text{ cm} \pm 0{,}052 \text{ cm} \text{ oder}$$

$$M = \pm\, 1{,}80 \text{ mm} \pm 0{,}52 \text{ mm}$$

Zur Berechnung der reciproken Gewichte für die ausgeglichenen Höhenunterschiede zweier Punkte, hat man den Höhenunterschied derselben als eine Funktion der Unbekannten x zu betrachten. Bezeichnet man die Differentialquotienten dieser Function nach den x_1, $x_2 \ldots$ mit F_1, $F_2 \ldots$ so erhält man nach Helmert's Ausgleichungsrechnung § 19 das reciproke Gewicht einer Function der Beobachtungen nach der Ausgleichung unter Beibehaltung der dort eingeführten Bezeichnungsweise:

$$\frac{1}{g_F} = \frac{F_1^2}{(aa)} + \frac{(F_2 \,.\, 1)^2}{(bb \,.\, 1)} + \frac{(F_3 \,.\, 2)^2}{(cc \,.\, 2)} + \frac{(F_4 \,.\, 3)^2}{(dd \,.\, 3)} + \ldots.$$

In den einzelnen reducirten Normalgleichungen gibt die erste Zeile der angehängten Gewichtscolumnen die Zähler F_1; $F_2 \,.\, 1$; $F_3 \,.\, 2 \ldots.$ der auf derselben Zeile stehende quadratische Coefficient der Unbekannten (aa); (bb . 1); (cc . 2) den zugehörigen Nenner obiger Quotienten. Der mittlere Fehler der Function ist dann

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left\{ \frac{F_1^2}{(aa)} + \frac{(F_2 \,.\, 1)^2}{(bb \,.\, 1)} + \frac{(F_3 \,.\, 2)^2}{(cc \,.\, 2)} + \frac{(F_4 \,.\, 3)^2}{(dd \,.\, 3)} + \ldots. \right\}$$

worin μ den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bedeutet.

So hat man für den mittleren Fehler des ausgeglichenen Höhenunterschiedes Kempten—Lichtenfels, diesen letzteren als

eine Function der eingeführten Unbekannten auszudrücken, und erhält diese in der Differenz der beiden Höhenunterschiede:

$$\begin{array}{lcl} \text{München—Lichtenfels} & = & +\,(258{,}4376 + x_1) \\ \text{München—Kempten} & = & -\,(174{,}7995 + x_{11}) \\ \hline \text{Kempten—Lichtenfels} & = & +\,(433{,}2371 + x_1 + x_{11}) \end{array}$$

Die Differentialquotienten nach den x sind hier $F_1 = + 1$: $F_{11} = + 1$

In den reducirten Normalgleichungen geben die betreffenden Columnen von x_1 und x_{11} für die obigen Quotienten folgende Zahlenwerthe:

$$\frac{F_1^{\,2}}{(aa)} = + 1 \times 0{,}018350 \qquad = + 0{,}018350$$

$$\frac{(F_2\,.\,1)^2}{(bb\,.\,1)} = + 0{,}42994 \times 0{,}01663 \qquad = + 0{,}007150$$

$$\frac{(F_3\,.\,2)^2}{(cc\,.\,2)} = + 0{,}20788 \times 0{,}01158 \qquad = + 0{,}002406$$

$$\frac{(F_4\,.\,3)^2}{(dd\,.\,3)} = + 0{,}13311 \times 0{,}00304 \qquad = + 0{,}000405$$

$$\frac{(F_5\,.\,4)^2}{(ee\,.\,4)} = + 0{,}09038 \times 0{,}00309 \qquad = + 0{,}000279$$

$$\frac{(F_6\,.\,5)^2}{(ff\,.\,5)} = + 0{,}03369 \times 0{,}00137 \qquad = + 0{,}000046$$

$$\frac{(F_7\,.\,6)^2}{(gg\,.\,6)} = + 0{,}02433 \times 0{,}00186 \qquad = + 0{,}000045$$

$$F_8\,.\,7 = F_9\,.\,8 = F_{10}\,.\,9 = 0$$

$$\frac{(F_{11}\,.\,10)^2}{(ll\,.\,10)} = + 1 \times 0{,}037922 \qquad = + 0{,}037922$$

$$\frac{(F_{12}\,.\,11)^2}{(mm\,.\,11)} = + 0{,}44103 \times 0{,}02397 \qquad = + 0{,}015707$$

$$\frac{(F_{13}\,.\,12)^2}{(nn\,.\,12)} = + 0{,}75755 \times 0{,}02224 \qquad = + 0{,}016846$$

$$\frac{(F_{14}\,.\,13)^2}{(00\,.\,13)} = + 0{,}30620 \times 0{,}01693 \qquad = + 0{,}005185$$

$$\frac{(F_{15} \cdot 14)^2}{(pp \cdot 14)} = \frac{(-0,16729 + 0,05775)^2}{26,752} = +0,000449$$

$$\frac{(F_{16} \cdot 15)^2}{(qq \cdot 15)} = \frac{(-0,11540 + 0,93095)^2}{7,319} = +0,090876$$

$$\frac{1}{g_F} = +0,195666$$

Der mittlere Fehler des Höhenunterschiedes Kempten — Lichtenfels nach der Ausgleichung ist daher

$$\mu_F = 5,69\,\text{cm}\sqrt{0,195666} = 5,69 \cdot 0,442$$

$$\mu_F = 2,51\,\text{cm}.$$

Auf diese Weise wurde der mittlere Fehler der ausgeglichenen Höhenunterschiede für alle anderen Strecken berechnet, soweit dieselben zur Verbindung des bayr. Praec.-Nivell. mit demjenigen der Nachbarländer dienen und in den Bereich der 6 Polygone fallen. Die Resultate sind am Schluss der 2. Ausgleichung zusammengestellt.

Um zu untersuchen, wie die Fehler dieser ersten Ausgleichung dem Gauss'schen Fehlergesetz folgen, sind die λ als wahre Fehler zu betrachten. Der mittlere Fehler μ_λ und der Durchschnittsfehler ϑ_λ ergeben sich dann:

$$\mu_\lambda = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{n}} = \sqrt{\frac{194,1036}{22}} = 2,97\ \text{cm}$$

$$\vartheta_\lambda = \sqrt{\frac{[\text{val. abs. } \lambda\sqrt{g}]}{n}} = \frac{50,3824}{22} = 2,29\,\text{cm}$$

daher das Verhältniss $\frac{\mu_\lambda}{\vartheta_\lambda} = \frac{2,97}{2,29} = 1,297$

Das Gauss'sche Fehlergesetz bestimmt dieses Verhältniss zu 1,2533.

Ferner ist die Summe des positiven Fehler $= + 21,3230$

die Summe der negativen Fehler . . . . $= - 29,0594$.

Werden die auf die Gewichtseinheit reducirten Fehler nach ihrer absoluten Grösse geordnet, und untersucht man das Vorkommen derselben innerhalb einzelner Grenzen*), so sieht man aus folgender Zusammenstellung, dass die negativen Fehler durchgängig vorherrschen, obgleich das erste Polygon mit dem grössten vorkommenden Schlussfehler von 0,108 m in die Ausgleichung nicht mit aufgenommen wurde. Wären sämmtliche 7 Polygone unter dieser Gewichtsannahme ausgeglichen worden, so würden die Abweichungen vom Gauss'schen Fehlergesetz noch grösser geworden sein, wie auch eine frühere provisorische Ausgleichung zeigte.

Es sollen liegen		In Wirklichkeit liegen aber		
zwischen d. Grenzen	Fehleranzahl	Fehleranzahl, davon sind	+ ,	−
$\pm 0{,}1\ \mu_\lambda$	1,8	1	0	1
$\pm 0{,}2\ \mu_\lambda$	3,5	6	2	4
$\pm 0{,}3\ \mu_\lambda$	5,2	6	2	4
$\pm 0{,}4\ \mu_\lambda$	6,8	6	2	4
$\pm 0{,}5\ \mu_\lambda$	8,4	8	3	5
$\pm 0{,}6\ \mu_\lambda$	9,9	10	5	5
$\pm 0{,}7\ \mu_\lambda$	11,4	11	5	6
$\pm 0{,}8\ \mu_\lambda$	12,7	13	5	8
$\pm 0{,}9\ \mu_\lambda$	13,9	15	6	9
$\pm 1\ \mu_\lambda$	15,0	16	7	9
$\pm 1{,}5\ \mu_\lambda$	19,1	20	10	10
$\pm 2{,}0\ \mu_\lambda$	21,0	20	10	10
$\pm 2{,}5\ \mu_\lambda$	21,7	21	10	11
$\pm 3{,}0\ \mu_\lambda$	22,0	22	10	12

*) Siehe Helmert Ausgleichungsrechnung § 30.

Dieses Vorherrschen der negativen Fehler deutet an, dass die Gewichte nicht vollkommen richtig bestimmt sind.

2. Es soll nun aus den Schlussfehlern, den Umfängen und den einzelnen gemessenen Höhen der 7 Polygone eine Gewichtsformel entwickelt und diese einer zweiten Ausgleichung, welche sich auf alle 7 Polygone erstreckt, zu Grunde gelegt werden. Hiebei wurde derselbe Weg eingeschlagen, wie ihn Vogler in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1877 nach Hansen angibt, und soll hier die Entwicklung der Formeln kurz wiedergegeben werden.

Die von den gemessenen Höhen abhängigen Fehlerbeträge kann man sich auf die Maasseinheit bezogen denken, so dass, wenn eine Höhe h mit dem Fehler $\pm \zeta$ behaftet ist, die Maasseinheit dann um den Betrag $\pm \frac{\zeta}{h} = \pm \eta$ fehlerhaft wäre. Da man nun annehmen darf, dass zwischen 2 Fixpunkten constante Terrainneigung vorhanden ist und dass während der Ausführung des Nivellement zwischen denselben die Witterungsverhältnisse gleich geblieben sind, so kann man η innerhalb zweier Fixpunkte näherungsweise als constant betrachten. Der Höhenunterschied H zwischen 2 Fixpunkten wird dann um $\pm H . \eta$ fehlerhaft sein. In einem geschlossenen Polygon reihen sich die einzelnen H_1, H_2, .. an einander, und wird ein jedes bezüglich um $\pm H_1 . \eta_1$, $\pm H_2 . \eta_2$ ..... fehlerhaft gemessen. Das von den gemessenen Höhen abhängige mittlere Fehlerquadrat eines Polygons ist daher:

$$\nu^2 = H_1^2 . \eta_1^2 + H_2^2 . \eta_2^2 + \ldots\ldots$$

Ersetzt man jedes η_1, η_2 durch seinen mittleren Betrag η_m so wird

$$\nu^2 = [H^2] . \eta_m^2$$

Nennt man ferner in einem Polygon den von der Weglänge abhängigen Theil des mittleren Fehlers pro Kilometer ξ_m so wird für diesen Theil das mittlere Fehlerquadrat eines geschlossenen Polygons von dem Umfang U

$$\mu^2 = U . \xi_m^2$$

Der Schlussfehler $\triangle$ eines geschlossenen Polygons von dem

Umfang U und den Höhenunterschieden [H] setzt sich dann zusammen aus:

$$\triangle^2 = \mu^2 + \nu^2 = U\,\xi_m^2 + [H^2]\,\eta_m^2$$

Für n Polygone erhält man n solche Gleichungen:

$$\triangle_1{}^2 = U_1 \,.\, \xi_m'^{\,2} + [H^2]_1\,\eta_m'^{\,2}$$
$$\triangle_2{}^2 = U_2 \,.\, \xi_m''^{\,2} + [H^2]_2\,\eta_m''^{\,2}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Das mittlere Fehlerquadrat eines Polygonschlusses ist dann

$$\mu_\triangle^2 = U\,\mu_\xi^2 + [H^2]\,\mu_\eta^2$$

und kommt der Wahrheit um so näher, je grösser die Anzahl n der Polygone ist, aus denen die Mittelwerthe μ_ξ und μ_η bestimmt werden. Um nun μ_ξ zu erhalten, denke man sich ξ_m^2 aus jeder der obigen Gleichungen bestimmt, dann addirt und durch die Anzahl n dividirt:

$$\mu_\xi^2 = \frac{[\xi_m^2]}{n} = \frac{\left[\frac{\triangle^2}{U} - \frac{[H^2]}{U}\,\eta_m^2\right]}{n}$$

oder indem man für η_m jedesmal den mittleren Werth μ_η einführt:

$$\mu_\xi^2 = \frac{1}{n}\left\{\left[\frac{\triangle^2}{U}\right] - \left[\frac{[H^2]}{U}\right]\mu_\eta^2\right\}$$

ebenso erhält man

$$\mu_\eta^2 = \frac{1}{n}\left\{\left[\frac{\triangle^2}{U}\right] - \left[\frac{U}{[H^2]}\right]\mu_\xi^2\right\}$$

oder in anderer Form:

$$\left[\frac{\triangle^2}{U}\right] = n\,.\,\mu_\xi^2 + \left[\frac{[H^2]}{U}\right]\mu_\eta^2$$

$$\left[\frac{\triangle^2}{[H^2]}\right] = \left[\frac{U}{[H^2]}\right]\mu_\xi^2 + n\,.\,\mu_\eta^2$$

Für das bayr. Praec.-Nivell. ist n = 7 und darf man den ermittelten Werthen von μ_ξ^2 und μ_η^2 keine grosse Genauigkeit zuschreiben, dagegen kann man doch erwarten, hieraus das gegen-

seitige Verhältniss zwischen dem Einfluss der nivellirten Länge und dem der gemessenen Höhen zu erhalten. Für obige Ausdrücke geben die 7 Polygone folgende Zahlenwerthe, in welchen die Längen in Kilometer und die Höhen in Einheiten von 10 m, die Schlussfehler △ aber in Millimeter angegeben sind.

	U Kil.	[H²] (10 m)²	△ mm	$\frac{\Delta^2}{U}$	$\frac{\Delta^2}{[H^2]}$	$\frac{[H^2]}{U}$	$\frac{U}{[H^2]}$
Polygon No. I.	242,700	164,0196	108,0	48,059	71,113	0,676	1,480
„ „ II.	402,761	135,6406	13,9	0,479	1,424	0,337	2,969
„ „ III.	482,584	139,0609	38,6	3,087	10,715	0,288	3,470
„ „ IV.	384,362	63,8639	20,2	1,062	6,390	0,166	6,019
„ „ V.	272,640	152,3661	9,8	0,352	0,630	0,559	1,789
„ „ VI.	287,114	574,5365	67,0	15,635	7,813	2,001	0,500
„ „ VII.	138,555	123,1820	1,9	0,026	0,029	0,889	1,125
				68,700	98,114	4,916	17,352

Die beiden Gleichungen zur Bestimmung von μ_ξ^2 und μ_η^2 werden daher:

$$68{,}700 = 7\,\mu_\xi^2 + 4{,}916\,\mu_\eta^2$$

$$98{,}114 = 17{,}352\,\mu_\xi^2 + 7\,.\,\mu_\eta^2$$

woraus $\mu_\xi^2 = 0{,}039$

und $\mu_\eta^2 = 13{,}92$

3. Mit diesen Werthen werden nun für jede Strecke von der Länge L und den Höhen [H] neue Gewichte von der Form

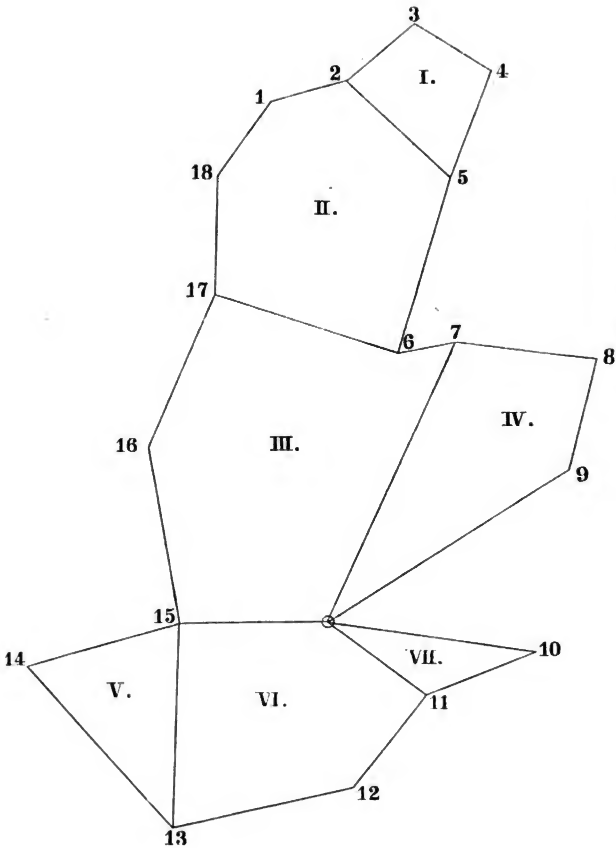
$$g = \frac{1000}{L\,\mu_\xi^2 + [H^2]\,\mu_\eta^2}$$

berechnet und damit eine zweite Ausgleichung durchgeführt, in welche, wie erwähnt, auch das erste Polygon mit aufgenommen ist.

Die Unbekannten vermehren sich in dieser wegen der Gewichtsberechnung der Verbindungsstrecken um 2 nämlich:

München—Oberkotzau und München—Franzensbad,

welche in die Reihenfolge zwischen jene der ersten Ausgleichung eingeschoben wurden, wodurch sich die Aufeinanderfolge der



Unbekannten etwas ändert. Nachfolgend sind dieselben mit ihren Näherungswerthen und Verbesserungen, welche jetzt mit y bezeichnet werden sollen, wiederholt; im Uebrigen ist aber der Gang der Rechnung derselbe geblieben wie oben.

			meter
1.	München—Lichtenfels	=	$+ (258,4376 + y_1)$
2.	—Neuenmarkt	=	$+ (173,1115 + y_2)$
3.	—Oberkotzau	=	$+ (\ 38,5721 + y_3)$
4.	—Franzensbad	=	$+ (\ 72,4247 + y_4)$
5.	—Weiden	=	$+ (123,9251 + y_5)$
6.	—Regensburg	=	$+ (181,5430 + y_6)$
7.	—Geiselhöring	=	$+ (161,9366 + y_7)$
8.	—Passau	=	$+ (218,7193 + y_8)$
9.	—Simbach	=	$+ (172,3407 + y_9)$
10.	—Rosenheim	=	$+ (\ 74,4257 + y_{10})$
11.	—Holzkirchen	=	$- (162,7622 + y_{11})$
12.	—Penzberg	=	$- (\ 82,6482 + y_{12})$
13.	—Kempten	=	$- (174,7995 + y_{13})$
14.	—Neuulm	=	$+ (\ 51,2089 + y_{14})$
15.	—Augsburg	=	$+ (\ 31,9722 + y_{15})$
16.	—Nördlingen	=	$+ (\ 92,0405 + y_{16})$
17.	—Nürnberg	=	$+ (211,1107 + y_{17})$
18.	—Bamberg	=	$+ (281,0086 + y_{18})$

Die Zahl der beobachteten Höhenunterschiede erhöht sich auf 25, und sind letztere mit den zugehörigen L und $[H^2]$ wie folgt zusammengestellt:

		meter	L-Kilom.	$[H^2]$
1.	Lichtenfels—Neuenmarkt	— 85,3261	42,672	5,74
2.	Neuenmarkt—Oberkotzau	— 134,5394	47,273	52,83
3.	Oberkotzau—Franzensbad	+ 33,8526	47,941	60,39
4.	Franzensbad—Weiden	+ 51,6084	67,496	16,74
5.	Weiden—Regensburg	+ 57,6179	86,969	13,61
6.	Regensburg—Geiselhöring	— 19,6064	33,666	3,43
7.	Geiselhöring—Passau	+ 56,7827	91,737	5,70
8.	Passau—Simbach	— 46,3786	56,287	16,15
9.	Simbach—München	— 172,2958	122,738	28,35
10.	München—Rosenheim	+ 74,4257	64,322	27,00
11.	Rosenheim—Holzkirchen	— 237,1879	38,129	58,28
12.	Holzkirchen—Penzberg	+ 80,1140	40,052	95,24

		meter	L-Kilom.	[H²]
13.	Penzberg—Kempten	— 92,1513	133,180	456,69
14.	Kempten—Neuulm	+ 225,9297	85,951	43,44
15.	Neuulm—Augsburg	— 19,2367	84,022	17,79
16.	Augsburg—Nördlingen	+ 60,0683	72,647	11,33
17.	Nördlingen—Nürnberg	+ 119,0702	101,181	26,52
18.	Nürnberg—Bamberg	+ 69,8979	60,009	3,13
19.	Bamberg—Lichtenfels	— 22,5710	32,198	2,00
20.	Neuenmarkt—Weiden	— 49,1864	79,990	34,05
21.	Nürnberg—Regensburg	— 29,5538	100,923	77,12
22.	München—Geiselhöring	+ 161,9119	113,600	23,53
23.	München—Holzkirchen	— 162,7603	36,104	37,91
24.	München—Augsburg	+ 31,9722	60,567	6,99
25.	Augsburg—Kempten	— 206,7028	102,667	91,13

Die Fehlergleichungen mit den ihnen zukommenden Gewichten sind auf Seite 33 zusammengestellt.

Aus diesen erhält man wieder die Normalgleichungen mit den angehängten Gewichtscolumnen und Summennormalgleichung wie oben (siehe Tableau 3); die Auflösung derselben nach dem Gauss'schen Algorithmus gibt die reducirten Normalgleichungen (siehe Tableau 4).

Daraus ergeben sich die Verbesserungen y zu:

	centim.		centim.
y_1	= — 2,060	y_{10}	= + 0,325
y_2	= — 2,319	y_{11}	= — 1,023
y_3	= — 6,275	y_{12}	= — 4,267
y_4	= — 10,797	y_{13}	= — 5,910
y_5	= — 1,265	y_{14}	= — 1,062
y_6	= — 1,875	y_{15}	= — 0,692
y_7	= — 2,096	y_{16}	= — 1,415
y_8	= — 2,376	y_{17}	= — 1,823
y_9	= — 3,143	y_{18}	= — 1,968

Die Richtigkeit derselben wird durch die Befriedigung der Summennormalgleichung (— 90,9025 = — 90,9025) bestätigt, und werden mit denselben die ausgeglichenen Höhenunterschiede erhalten, welche zum besseren Vergleich mit den Resultaten der ersten Ausgleichung nachfolgend einander gegenübergestellt sind:

		]cm	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	y_{17}	y_{18}	$g = \frac{1000}{0{,}039\ L + 13{,}92\,[H^2]}$
1.	λ_1	= .	+1	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	12,26
2.	λ_2	= .	.	+1	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,36
3.	λ_3	= .	.	.	−1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,19
4.	λ_4	= − 10,80	.	.	.	−1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4,24
5.	λ_5	= .	.	.	.	.	−1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5,19
6.	λ_6	= .	.	.	.	.	.	+1	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	20,38
7.	λ_7	= .	.	.	.	.	.	.	−1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	12,06
8.	λ_8	= .	.	.	.	.	.	.	.	+1	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4,41
9.	λ_9	= + 4,49	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2,51
10.	λ_{10}	= .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	2,64
11.	λ_{11}	= .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	+1	.	.	.	.	.	.	.	1,23
12.	λ_{12}	= .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	−1	.	.	.	.	.	.	0,75
13.	λ_{13}	= .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	.	.	.	.	.	1,48
14.	λ_{14}	= + 7,87	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	+1	.	.	.	.	1,64
15.	λ_{15}	= .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	−1	.	.	.	3,98
16.	λ_{16}	= .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	.	.	6,23
17.	λ_{17}	= .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	.	11,07
18.	λ_{18}	= .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	+1	21,78
19.	λ_{19}	= .	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	34,37
20.	λ_{20}	= .	.	+1	.	.	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2,10
21.	λ_{21}	= + 1,39	.	.	.	.	.	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	0,93
22.	λ_{22}	= + 2,47	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3,01
23.	λ_{23}	= + 0,19	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	1,89
24.	λ_{24}	= .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	10,03
25.	λ_{25}	= + 6,89	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	+1	.	.	.	3,34

Strecke	Höhenunterschied nach der I. Ausgleichung meter	Höhenunterschied nach der II. Ausgleichung meter
München—Lichtenfels	+ 258,4109	+ 258,4170
—Neuenmarkt	+ 173,0856	+ 173,0883
—Oberkotzau	—	+ 38,5093
—Franzensbad	—	+ 72,3167
—Weiden	+ 123,9006	+ 123,9124
—Regensburg	+ 181,5200	+ 181,5242
—Geiselhöring	+ 161,9113	+ 161,9156
—Passau	+ 218,6874	+ 218,6955
—Simbach	+ 172,3047	+ 172,3093
—Rosenheim	+ 74,4300	+ 74,4290
—Holzkirchen	— 162,7553	— 162,7520
—Penzberg	— 82,6330	— 82,6055
—Kempten	— 174,7567	— 174,7404
—Neuulm	+ 51,1827	+ 51,1983
—Augsburg	+ 31,9556	+ 31,9653
—Nördlingen	+ 92,0190	+ 92,0263
—Nürnberg	+ 211,0824	+ 211,0925
—Bamberg	+ 280,9814	+ 280,9889

Aus den Fehlergleichungen erhält man die λ, $\lambda\lambda g$ und $\lambda \sqrt{g}$ der zweiten Ausgleichung zu:

	λ^{cm}	$\lambda\lambda g$	$\lambda \sqrt{g}^{cm}$
1)	+ 0,25840	0,81861341	+ 0,9048
2)	+ 3,95640	21,28821731	+ 4,6139
3)	— 4,52190	24,33260893	— 4,9328
4)	— 1,26811	6,81830283	— 2,6112
5)	— 0,60980	1,92990750	— 1,3892
6)	+ 0,22117	0,99688449	+ 0,9984
7)	— 0,28038	0,94808563	— 0,9737
8)	+ 0,76654	2,59124355	+ 1,6097
9)	+ 1,34714	4,55511331	+ 2,1343
10)	+ 0,32519	0,27918302	+ 0,5284
11)	— 0,69798	0,59922312	— 0,7741
12)	+ 3,24419	7,89356683	+ 2,8095
13)	— 1,64312	3,99574871	— 1,9989

	λ^{cm}	$\lambda\lambda g$	$\lambda\sqrt{g}^{cm}$
14)	+ 0,89773	1,32171032	+ 1,1497
15)	— 0,36988	0,54451454	— 0,7379
16)	— 0,72357	3,26173858	— 1,8060
17)	— 0,40717	1,83523958	— 1,3547
18)	— 0,14535	0,46012517	— 0,6783
19)	+ 0,09217	0,29200911	+ 0,5404
20)	— 1,05360	2,33113552	— 1,5268
21)	+ 1,44212	1,93413845	+ 1,3907
22)	+ 0,37406	0,42116636	+ 0,6490
23)	— 0,83317	1,31199187	— 1,1454
24)	— 0,69191	4,80177052	— 2,1913
25)	+ 0,28761	0,27628893	+ 0,5256
		$[\lambda\lambda g] = 95,83852759$	

Die ganze Rechnung wird wieder durch die doppelt gerechnete Summe $[\lambda\lambda g]$ controlirt. (95,83852759 gegenüber 95,801333.)

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{n-m}} = \sqrt{\frac{95,83852759}{25-18}} = \pm\,(3,700^{cm} \pm 0,99^{cm})$$

und der mittlere Fehler bezogen auf den Kilometer und für einen Höhenunterschied von 10 meter

$$\mu_1 = \pm\sqrt{\frac{0,09583853}{25-18}} = \pm\,(0,1170^{cm} \pm 0,031^{cm})$$

oder $\mu_1 = \pm\,(1,17^{mm} \pm 0,31^{mm})$.

Die mittleren Fehler für die ausgeglichenen Höhenunterschiede der Anschlusspunkte in den Polygonen an die Zweignivellements des bayr. Praec.-Nivell. oder an diejenigen der Nachbarländer wurden, wie oben angegeben, berechnet und sind mit jenen der ersten Ausgleichung, wie folgt, zusammengestellt.

Strecke	mittlerer Fehler des ausgeglichenen Höhenunterschiedes nach der I. Ausgleich. centim.	II. Ausgleich. centim.
Kempten—Lichtenfels	± 2,515	± 2,453
— Neuenmarkt	± 2,566	± 2,546
— Oberkotzau	—	± 3,452
— Franzensbad	—	± 3,067
— Weiden	± 2,487	± 2,653
Rosenheim — Lichtenfels.	± 2,401	± 2,764
— Neuenmarkt	± 2.441	± 2,845
— Oberkotzau	—	± 3,641
— Franzensbad	—	± 3,241
— Weiden	± 2,339	± 2,842
— Neuulm	± 1,912	± 2,757
— Nördlingen	± 1,849	± 2,557
Bamberg - Passau	± 2,304	± 2,124
— Simbach	± 2,378	± 2,338
Nördlingen — Passau	± 2,157	± 2,057
- Simbach	± 2,162	± 2,227
Neuulm—Passau	± 2,316	± 2,494
— Simbach	± 2,282	± 2,579

Man ersieht hieraus, dass bei jeder der beiden Ausgleichungen durch das bayr. Praec.-Nivell. nahezu dieselben mittleren Fehler übertragen werden.

Zur Untersuchung der Fehler λ auf ihre Uebereinstimmung mit dem Gauss'schen Fehlergesetz ist zunächst wieder:

$$\mu_\lambda = \sqrt{\frac{95{,}83852759}{25}} = 1{,}958 \text{ cm}$$

$$\vartheta_\lambda = \frac{39{,}9747}{25} = 1{,}599 \text{ daher}$$

$$\frac{\mu_\lambda}{\vartheta_\lambda} = \frac{1{,}958}{1{,}599} = 1{,}225$$ (nach dem Gauss'schen Gesetz = 1,253).

Ferner ist die Summe der positiven Fehler . = 17,8544
d die Summe der negativen Fehler . . . . . . = 22,1203.

In Bezug auf das Vorkommen der Fehler innerhalb einzelner
enzen hat man wieder wie oben folgende Uebersicht:

Es sollen liegen		In Wirklichkeit liegen		
schen den Grenzen	Fehleranzahl	Fehleranzahl, davon sind	+,	—
0,1 μ_λ	2,0	0	0	0
0,2 μ_λ	4,0	0	0	0
0,3 μ_λ	5,9	3	3	0
0,4 μ_λ	7,8	7	4	3
0,5 μ_λ	9,6	9	5	4
0,6 μ_λ	11,3	12	7	5
0,7 μ_λ	12,9	13	7	6
0,8 μ_λ	14,4	16	8	8
0,9 μ_λ	15,8	17	9	8
1,0 μ_λ	17,1	18	9	9
1,5 μ_λ	21,7	23	11	12
2,0 μ_λ	23,9	23	11	12
2,5 μ_λ	24,7	24	12	12
3,0 μ_λ	25,0	25	12	13

Es geht hieraus hervor, dass die Fehler, mit Ausnahme der
isten Beträge das Gesetz zufälliger Fehler in guter Ueber-
immung befolgen, und dass die positiven und negativen Fehler,
dem sich die Ausgleichung auf alle 7 Polygone erstreckt, sich
hheitlicher vertheilen, als es bei der ersten Ausgleichung mit
6 Polygonen der Fall war. Es sind aus diesem Grunde die
ichte nunmehr richtiger bestimmt als früher, und finden hierin
vorausgehenden Untersuchungen indirect ihre Bestätigung.

Stellt man die verschieden berechneten mittleren Fehler zusammen:

$$M = 0{,}78 \text{ mm}$$
$$M = 0{,}033 \text{ „}$$
$$M = 3{,}13 \text{ „}$$
$$M = 1{,}80 \text{ „}$$
$$\mu_1 = 1{,}17 \text{ „}$$

so dürfte aus diesen Untersuchungen, welche sich nicht auf speciell zur Genauigkeitsermittlung angestellter Beobachtungen stützen, sondern für welche die letzteren unmittelbar der thatsächlichen Ausführung entnommen sind, hinlänglich erwiesen sein, dass die Genauigkeit des bayr. Praec.-Nivell. vollständig die von der Conferenz der europäischen Gradmessung vorgeschriebene Grenze eines wahrscheinlichen Fehlers von 3 mm = eines mittleren Fehlers von 4,45 mm pro Kilometer einhält. Diese Grenze dürfte sogar enger gezogen werden, ohne das in Wirklichkeit Erreichbare zu erschweren. Was den von der gemessenen Höhe abhängigen Fehler betrifft, so ist über denselben von der europäischen Gradmessungs-Commission nichts bestimmt worden.

Nimmt man nun den Werth von 1,17 mm als Gesammtfehler für 1 Kilometer Doppelnivellement und 10 m gemessener Höhe an und legt der Theilung desselben das aus der obigen Gewichtsbestimmung ermittelte Verhältniss von

$$\frac{\mu_\eta^2}{\mu_\xi^2} = \frac{13{,}92}{0{,}039} = 353{,}7$$

zu Grunde, so erhält man als

mittleren Fehler für 10 m gemessener Höhe = 1,16 mm
und als „ „ für 1 Klm. doppelt. nivell. Länge = 0,06 „.

Betrachtet man dagegen den aus den Stationsbeobachtungen berechnete Fehler von 0,78 mm als reinen Nivellirfehler pro Kilom., so würde sich der nämliche Gesammtfehler von 1,17 mm folgendermassen theilen:

$$1{,}17^2 = 0{,}78^2 + \mu_\eta^2$$

und erhielte man hieraus

den mittleren Fehler pro 10 m gemessener Höhe zu $\mu_\eta = 0{,}87$ mm

also unter dieser Annahme nahezu ebenso gross als der mittlere Fehler pro Kilometer.*) Aus diesem und dem obigen Werth des mittleren Fehlers pro 10 m gemessener Höhe darf man schliessen, dass derselbe nicht viel von 1 mm verschieden ist, ein Werth, den auch das schweizerische Praec.-Nivell. von Plantamour gibt und ebenfalls auch von Vogler aus einem Theil des vom geodätischen Institut in Berlin ausgeführten Praec.-Nivell. gefunden wurde.**) Es dürfte daher dieser Betrag von 1 mm pro 10 m gemessener Höhe als Grenze für die gegenwärtige Operationsweise und für die bis jetzt gebräuchlichen Latten anzunehmen sein. Um unter diesem Betrag zu bleiben, dürfte durch Versuche zu ermitteln sein, ob es nicht vortheilhaft wäre, bei stark geneigtem Terrain mit geneigten Visirlinien zu nivelliren, und zwar nicht um die Stationslängen zu vergrössern sondern hauptsächlich, um den Einfluss der Unsymmetrie der Lichtcurve im Vor- und Rückblick zu beschränken. Ferner sollte grosse Sorgfalt auf die Herstellung und Theilung der Latten verwendet, und letztere wiederholt geprüft, wie auch die Latten selbst nach gewissen Zeiträumen mit dem Normalmaass abermals verglichen werden; auch auf die Aufbewahrung der Latten während der Zeit ihres Nichtgebrauches dürfte ein besonderes Augenmerk zu richten sein.

*) Eine wiederholte Ausgleichung der 7 Polygone unter Annahme neuer Gewichte, welche dieser Trennung des Gesammtfehlers entspricht, würde dann zeigen, ob der hieraus hervorgehende mittlere Fehler wesentlich von 1,17 mm abweicht.

**) Zeitschrift für Vermessungswesen 1877.

	(x_{14})	(x_{15})	(x_{16})
	.	.	.
	+ 1		
	.	+ 1	
	.	.	+ 1
	+ 1	+ 1	+ 1

(x_{12})	(x_{13})	(x_{14})	(x_{15})	(x_{16})
+ 1 + 0,05435				
+ 0,88017 + 0,02584	+ 1 + 0,02935			
+ 0,35576 + 0,01967	+ 0,40421 + 0,02235	+ 1 + 0,05530		
+ 0,19437 + 0,00727	+ 0,22084 + 0,00826	+ 0,54634 + 0,02042	+ 1 + 0,03738	
+ 0,13409 + 0,01832	+ 0,15235 + 0,02082	+ 0,37691 + 0,05150	+ 0,68985 + 0,09425	+ 1 + 0,13663

3.

(y_1)	(y_{11})	(y_{16})	(y_{17})	(y_{18})
1				
.				
.				
.				
.				
.				
.				
.				
.				
.				
.	+ 1			
.	.			
.	.			
.	.			
.	.			
.	.			
.	.	.	+ 1	
.	.	.	.	+ 1
	+ 1		+ 1	+ 1

(y_4)	(y_5)	(y_6)	(y_7)	(y_8)
+ 1 + 0,20661				
+ 0,89938 + 0,12422	+ 1 + 0,13812			
+ 0,64472 + 0,02830	+ 0,71685 + 0,03147	+ 1 + 0,04390		
+ 0,57679 + 0,03350	+ 0,64131 + 0,03725	+ 0,89464 + 0,05196	+ 1 + 0,05808	
+ 0,40403 + 0,05037	+ 0,44922 + 0,05600	+ 0,62667 + 0,07812	+ 0,70047 + 0,08732	+ 1 + 0,12466
+ 0,22211 + 0,04940	+ 0,24695 + 0,05493	+ 0,34450 + 0,07662	+ 0,38508 + 0,08565	+ 0,54974 + 0,12228
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
+ 0,09936 + 0,00390	+ 0,11049 + 0,00434	+ 0,15412 + 0,00606	+ 0,13664 + 0,00498	+ 0,11187 + 0,00440
+ 0,59837 + 0,15494	+ 0,55342 + 0,14330	+ 0,37685 + 0,09758	+ 0,30965 + 0,08018	+ 0,27346 + 0,07081

(y_8)	(y_9)	(y_{10})	(y_{11})	(y_{12})	(y_{13})	
+ 1 + 0,12466						
+ 0,54974 + 0,12228	+ 1 + 0,22244					
:	:	+ 1 + 0,25840				
:	:	— 0,31783 — 0,09136	+ 1 + 0,28744			
:	:	— 0,06852 — 0,03313	+ 0,21558 + 0,10425	+ 1 + 0,48356		
:	:	— 0,04904 — 0,00908	+ 0,15428 + 0,02857	+ 0,71567 + 0,13251	+ 1 + 0,18515	
:	:	+ 0,01489 + 0,00291	— 0,04685 — 0,00915	— 0,21731 — 0,04243	— 0,30365 — 0,05928	+ +
:	:	+ 0,04485 + 0,00269	— 0,14109 — 0,00848	— 0,65445 — 0,03932	— 0,91446 — 0,05494	+ +
:	:	+ 0,01678 + 0,00112	— 0,05281 — 0,00353	— 0,24494 — 0,01636	— 0,34225 — 0,02287	+ +
0,11187 0,00440	+ 0,07129 + 0,00280	+ 0,01241 + 0,00049	— 0,03905 — 0,00153	— 0,18115 — 0,00712	— 0,25312 — 0,00995	+ +
0,27346 0,07081	+ 0,17426 + 0,04512	+ 0,01074 + 0,00278	— 0,03375 — 0,00874	— 0,15665 — 0,04056	— 0,21888 — 0,05668	+ +

(y_{14})	(y_{15})	(y_{16})	(y_{17})	(y_{18})
1 0,19524				
0,97501 0,05857	+ 1 + 0,06007			
0,36491 0,02438	+ 0,37426 + 0,02500	+ 1 + 0,06681		
0,26988 0,01060	+ 0,27680 + 0,01088	+ 0,73958 + 0,02906	+ 1 + 0,03929	
0,23336 0,06043	+ 0,23935 + 0,06198	+ 0,63952 + 0,16559	+ 0,86472 + 0,22391	+ 1 + 0,25893